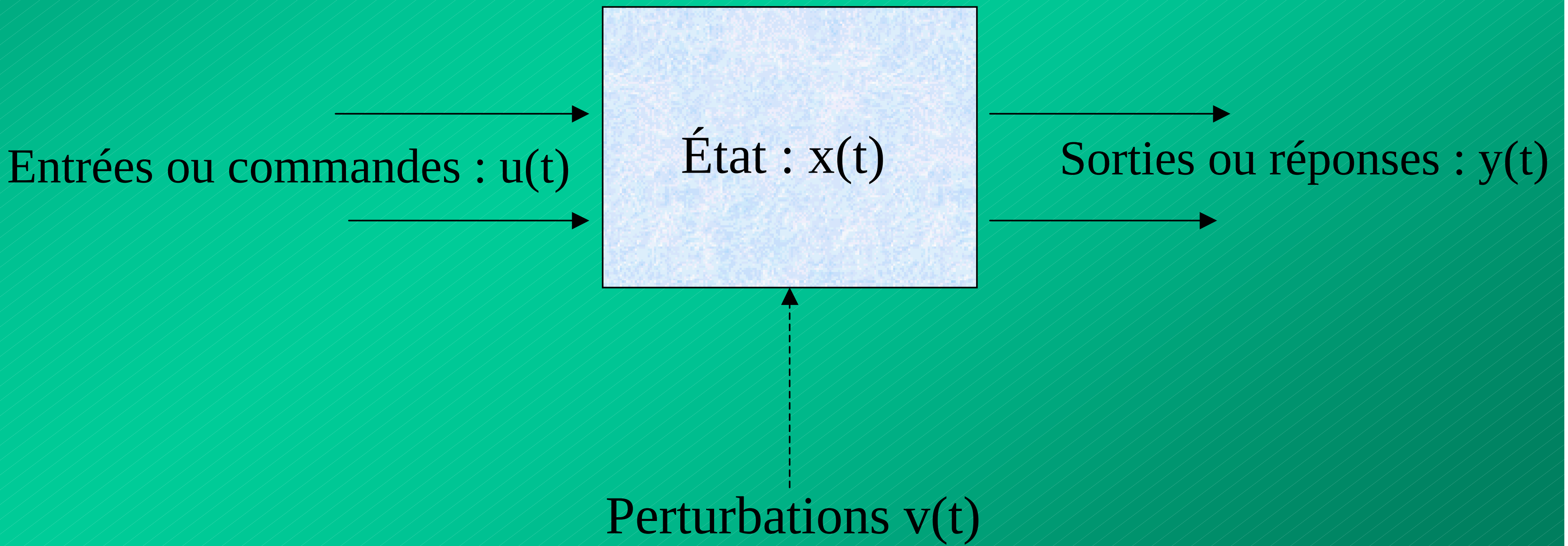
Généralités

Représentation des systèmes par des schémas de blocs

Un bloc….??



Généralités

Deux types de modèles

Modèles de connaissance

On connaît les relations entre $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $y(t)$: **rare !!!**

Modèles de type boîte noire

On n'a accès (ou intérêt) qu'à la relation entre $u(t)$ et $y(t)$: **souvent suffisant pour la régulation et la commande**

Commande ≡ mode d'action sur u(t) pour obtenir une réponse y(t) optimale selon un critère fixé par l'utilisateur

Régulation ≡ cas particulier (y(t) ≈ consigne)

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Définition : u(t) et y(t) ($\in$ R) sont reliés par une relation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants

Exemples :

Thermomètre…

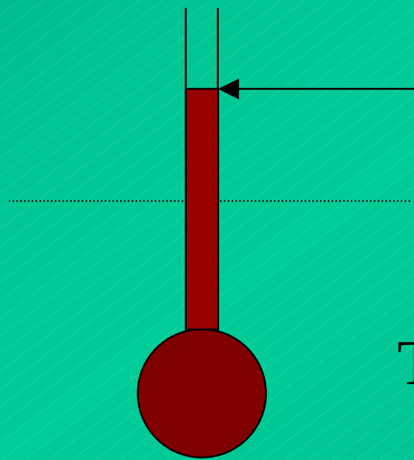
Niveau dans un réservoir…

Réacteur parfaitement agité…

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Thermomètre

Système physique….



Température lue : T

Température du milieu : T_0

Schéma de bloc….

Entrée : $T_0(t)$ → État : $T(t)$ → Sortie : $T(t)$

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Thermomètre (suite…)

Mise en équation….

Bilan énergétique : variation de l'énergie thermique du thermomètre ≈ énergie reçue du milieu

$$mC_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=hA(T_0-T)$$

ou

$$\boxed{\frac{mC_p}{hA}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+T=T_0}$$

Données :

C_p : capacité calorifique massique du thermomètre

A : surface de contact thermomètre-milieu

h : coefficient de transfert thermique : milieu-thermomètre

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Niveau dans réservoir

Système physique….

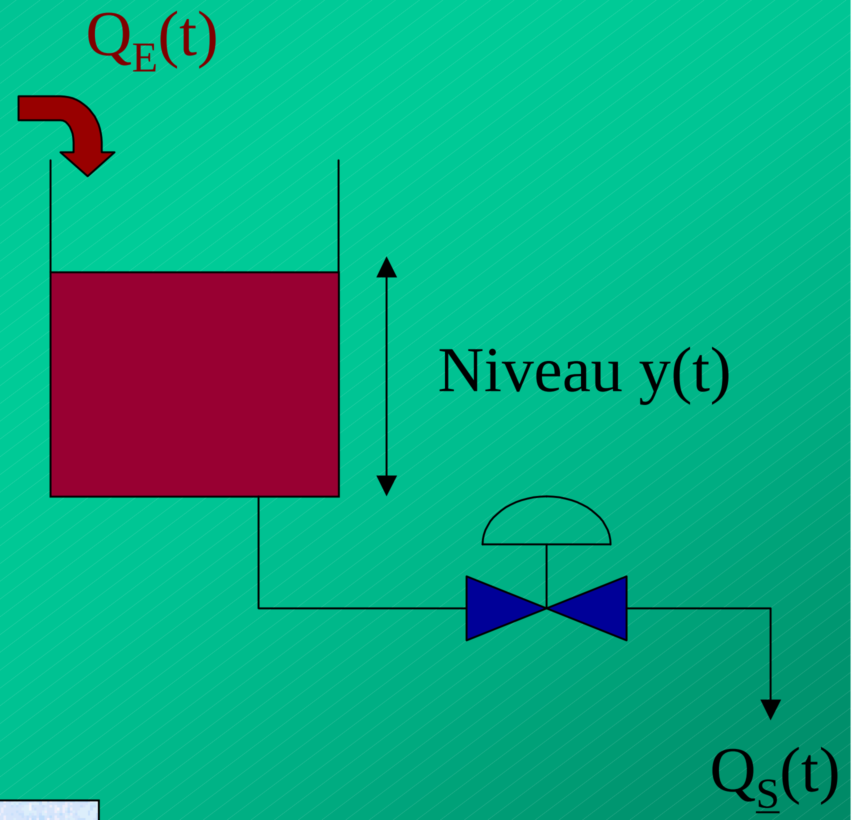
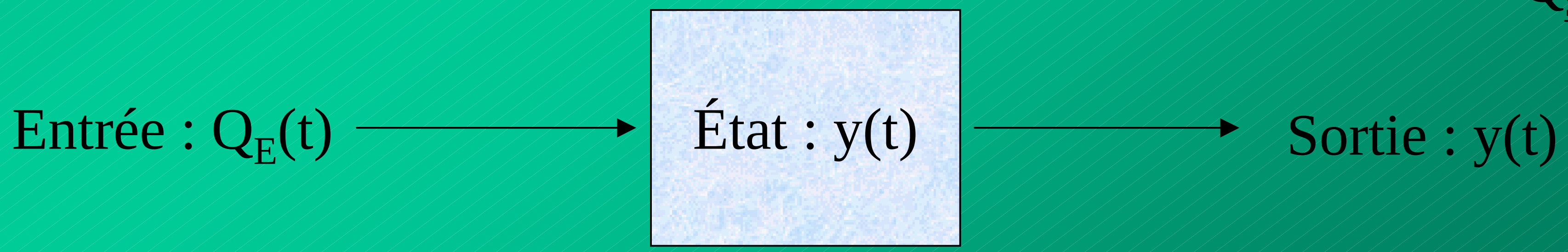


Schéma de bloc….



Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Niveau dans réservoir (suite…)

Mise en équation….

Bilan volumique : variation de volume par unité de temps = différence de débits d'entrée et sortie

$$\Omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q_E - Q_S$$

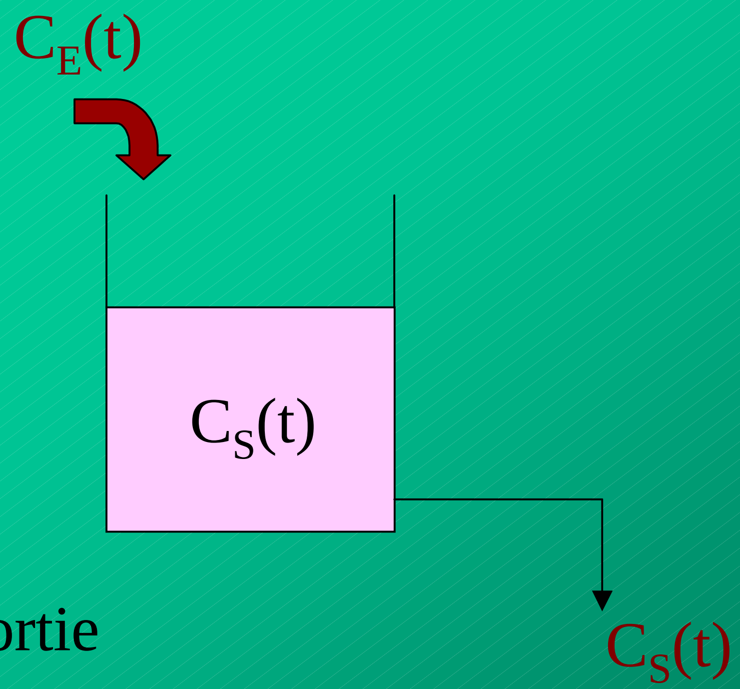
avec Ω section du réservoir

$Q_S = y/R$; R : caractéristique de la vanne

$$\boxed{R\Omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = RQ_E}$$

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Réacteur parfaitement agité (cinétique du premier ordre)



Système physique….

C : concentration en A

Réaction : A $\rightarrow$ B

Cinétique du premier ordre en A : w = kC

Débits volumiques entrée sortie égaux

Concentration interne = concentration de sortie

Schéma de bloc….le même

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Réacteur parfaitement agité (suite…)

Mise en équation….

Bilan de quantité de matière de A : variation de quantité de matière de A par unité de temps = différence de débits molaires d'entrée et sortie – quantité transformée

Données :

V : volume constant du liquide

F : débit volumique d'alimentation (de soutirage)

$$V\frac{\mathrm{d}C_S}{\mathrm{d}t} = FC_E - FC_S - VkC_S$$

ou

$$\frac{V}{F+Vk}\frac{\mathrm{d}C_S}{\mathrm{d}t} + C_S = \frac{V}{F+Vk}C_E$$

Systèmes linéaires du premier ordre une entrée – une sortie

Forme « canonique » de la relation entrée-sortie

Forme commune dans tous ces problèmes :

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = Ku$$

Où : $\tau = \frac{mC_p}{kA} \left(\text{resp. } R\Omega, \frac{V}{F+Vk} \right)$ est **l'inertie** du système

et K $K = 1 \left(\text{resp. } RQ_E, \frac{F}{F+Vk} \right)$ est le **gain** du système

En régime **stationnaire** : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ et $y_{st} = Ku_{st}$

u_{st} et y_{st} sont pris en général comme références et u et y remplacés par les **écarts** respectifs : **$u - u_{st}$** et ***$y - y_{st}$***

Systèmes linéaires du deuxième ordre une entrée – une sortie

Définition :

u(t) et y(t) ($\in$ R) sont reliés par une relation différentielle du deuxième ordre linéaire à coefficients constants

Exemples :

Circuit RLC…

Système à deux constantes de temps…

Systèmes linéaires du deuxième ordre une entrée – une sortie

Circuit RLC

Système physique….

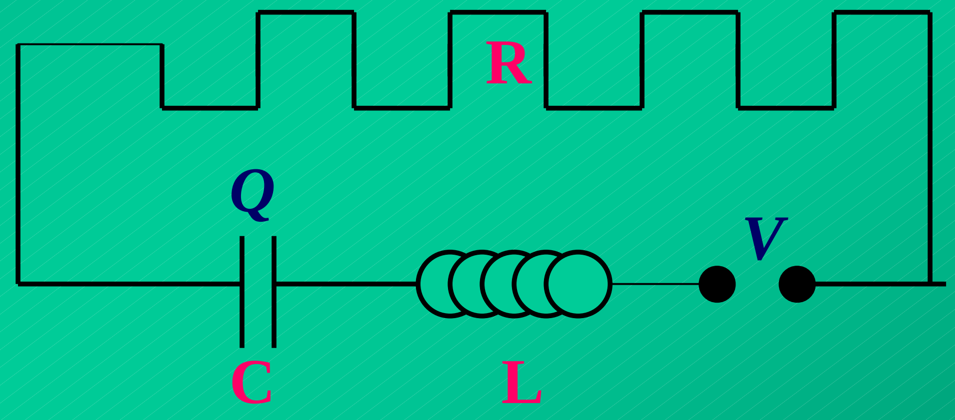


Schéma de bloc….

Entrée : ***V*** → État : ***Q***(t) → Sortie : ***Q***(t)

Systèmes linéaires du deuxième ordre une entrée – une sortie

Circuit RLC (suite)

Mise en équation….

$$V = \frac{Q}{C} + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q = CV}$$

Systèmes linéaires du deuxième ordre une entrée – une sortie

Système à deux constantes de temps :
exemple des mélangeurs en cascade

Système physique….

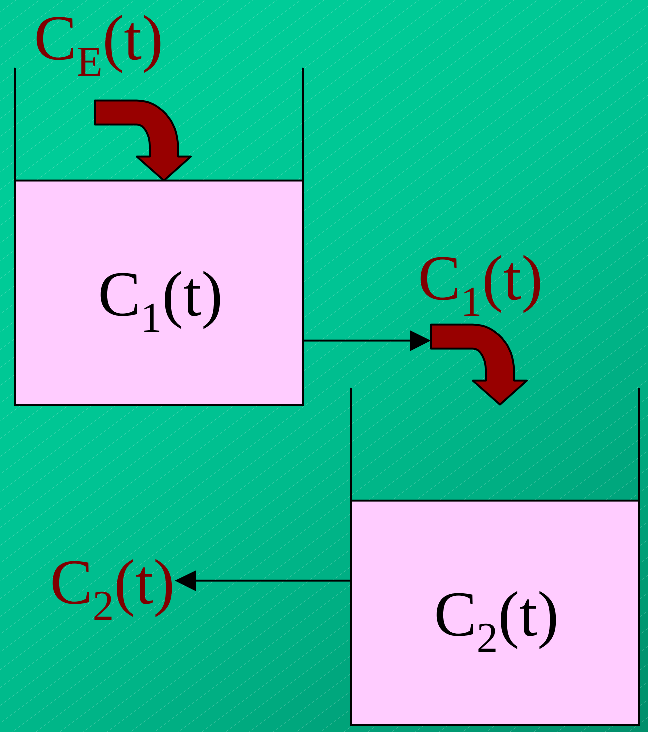


Schéma de bloc….

Entrée : $\boldsymbol{C_E}$ $\longrightarrow$ État : $\boldsymbol{C_2}(t)$ $\longrightarrow$ Sortie : $\boldsymbol{C_2}(t)$

Systèmes linéaires du deuxième ordre une entrée – une sortie

Système à deux constantes de temps (suite) :

Mise en équation….

Deux bilans molaires (un par réservoir) :

$$V_1 \frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t} = F(C_E - C_1)$$
$$V_2 \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = F(C_1 - C_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_1 V_2}{F^2}\frac{\mathrm{d}^2 C_2}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{V_1}{F} + \frac{V_2}{F}\right)\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} + C_2 = C_E$$

Systèmes linéaires du deuxième ordre une entrée – une sortie

Forme « canonique » de la relation entrée-sortie

Forme commune dans tous ces problèmes :

$$\tau^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\tau\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=Ku$$

Où : K est le **gain**, τ la **constante de temps** et ζ **l'amortissement**

Cas particulier du sytème à deux constantes de temps :

$$\tau_1\tau_2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+(\tau_1+\tau_2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=Ku$$

où : $\tau_1=\frac{V_1}{F}$ et $\tau_2=\frac{V_2}{F}$

Systèmes linéaires multivariables
Représentation par équation d'état

Retour sur l'exemple des mélangeurs en cascade :

$$V_1 \frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t} = F(C_E - C_1)$$
$$V_2 \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = F(C_1 - C_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{\tau_2} & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \\ 0 \end{pmatrix}(C_E) \qquad C_2 = (0\ 1)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Cas général :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu \ \text{ et } \ y = Cx}$$

Avec:

- x : **état** du système ($x \in \mathbf{R}^n$)
- A : **matrice dynamique**
- B : **matrice de commande**
- C : **matrice d'observation**

Résolution des systèmes dynamiques linéaires

Pb : trouver y(t) en fonction de u(t)

Un outil : le calcul opérationnel via la transformée de Laplace

La transformée de Laplace

Définition : $$f(t) \rightarrow \mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad s \in \mathbb{C}$$

Existence : $f(t)$ ne doit pas croître plus vite qu'une exponentielle

Exemple : $$f(t) = a \rightarrow \mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} a\,dt = \frac{a}{s}$$

Résolution des systèmes dynamiques linéaires

La transformée de Laplace (suite)

Propriétés :

- linéarité :

$$\mathcal{L}\,[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- transformée d'une dérivée :

$$\mathcal{L}\,[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = s\mathcal{L}\,[f(t)] - f(0)$$

- transformée d'une intégrale :

$$s\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t)\,dt\right] = \mathcal{L}\,[g(t)] \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t)\,dt\right] = \frac{\mathcal{L}\,[g(t)]}{s}$$

Résolution des systèmes dynamiques linéaires

La transformée de Laplace

Propriétés (suite):

• translation : $\mathcal{L}\,[f(t\text{-}a)] = ?$

On considère : $f(t) = 0$ pour $t < 0$ (fonction causale)

Soit $g(t) = f(t\text{-}a)$

$t' = t\text{-}a$

$$\mathcal{L}\,[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)\,dt$$

$$\mathcal{L}\,[g(t)] = \int_{-a}^{\infty} e^{-s(t'+a)} f(t')\,dt' = e^{-as}\,\mathcal{L}\,[f(t)]$$

• théorème de la valeur finale :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,dt = s\mathcal{L}\,[f] - f(0)$$

Quand $s \to 0$ $\lim s\mathcal{L}\,[f(t)] = f(\infty)$

• théorème de la valeur initiale :

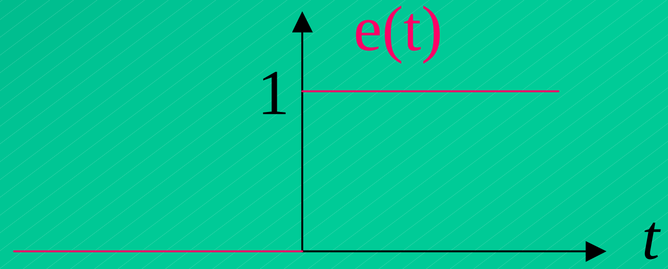
Quand $s \to \infty$, $f(0) = \lim s\mathcal{L}\,[f(t)]$

Résolution des systèmes dynamiques linéaires

La transformée de Laplace

Exemples de transformées (fonctions causales)

- échelon unité :



$$e(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$$

- $t \longrightarrow \dfrac{1}{s^2}$
- $t^{n-1} \longrightarrow \dfrac{(n-1)!}{s^n}$
- $e^{at} \longrightarrow \dfrac{1}{s-a}$
- $te^{at} \longrightarrow \dfrac{1}{(s-a)^2}$
- $\sin(at) \longrightarrow \dfrac{a}{a^2+s^2}$
- $\cos(at) \longrightarrow \dfrac{s}{a^2+s^2}$

Résolution des systèmes dynamiques linéaires

La transformée de Laplace

Application à la résolution des équations différentielles linéaires

Exemple d'illustration :

$y'' + k^2 y = 0$ avec : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Linéarité

Théorème de la dérivation :

$\Rightarrow$

$sL[y'] - 1 + k^2 L[y] = 0$

$s^2 L[y] + k^2 L[y] = 1$

$\Rightarrow$

$$L[y] = \frac{1}{k^2 + s^2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$$

Fonctions de transfert

Définition :

Grâce à la transformation de Laplace, la relation **différentielle** linéaire à coefficients constants entre ***u*(*t*) et *y*(*t*)** ($\in$ R) va être remplacée par une relation algébrique entre leurs transformées respectives ***U*(*s*) et *Y*(*s*)** de la forme :

$$\boldsymbol{Y(s) = F(s).U(s)}$$

F(s) est la **fonction de transfert** du système

Exemple : le système du premier ordre :

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = Ku$$

u(0) = 0
y(0) = 0

Laplace $\Rightarrow \tau\, s\, Y(s) + Y(s) = K\, U(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+\tau s} = F(s)$

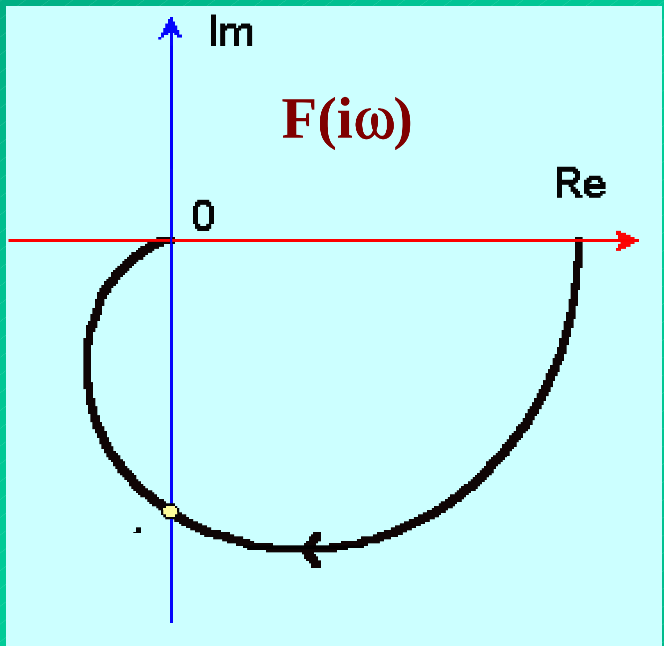
Fonctions de transfert (suite)

Intérêt :

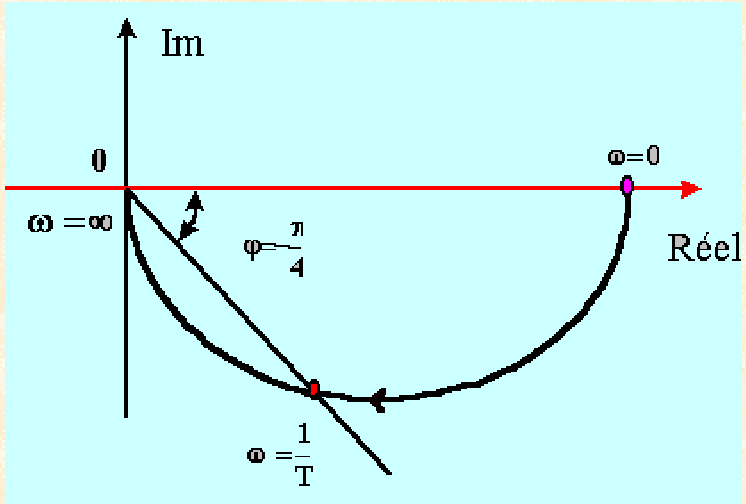
En opérant sur des transformées de Laplace, on remplace le calcul différentiel par du calcul algébrique, dit opérationnel

Représentation graphique : le diagramme de de Nyquist :

Représentation graphique dans le plan complexe de $F(i\omega)$ pour $\omega \in [0, \infty[$

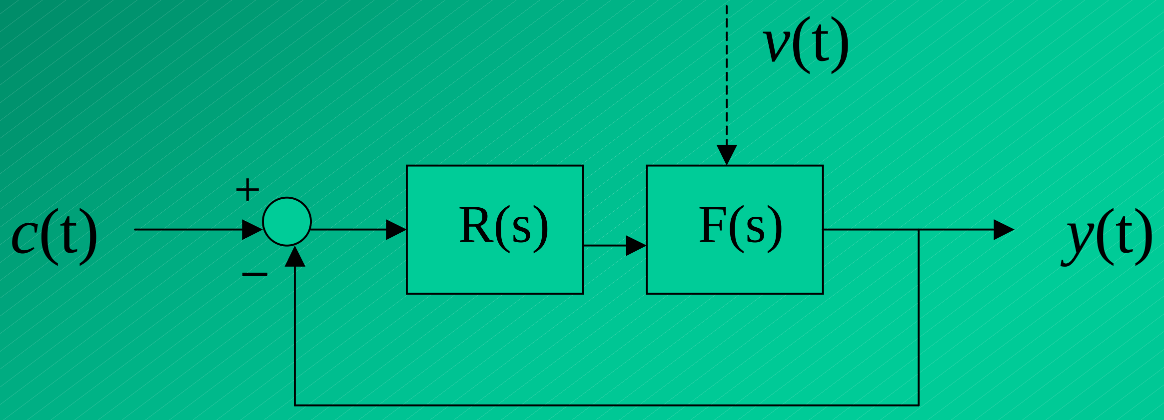


Exercice : diagramme de Nyquist d'une fonction de transfert du premier ordre



Fonctions de transfert (suite)

Exemples de calcul dans des schémas de blocs :



Calculer y(t) en fonction de c(t) et v(t)

$$Y(s) = \frac{F(s)V(s) + F(s)R(s)C(s)}{1 + F(s)R(s)}$$

Schéma fondamental de la boucle de régulation :

F est fonction de transfert du système, *R* du **régulateur**

c est la **consigne** que doit respecter *y*

v est une **perturbation**

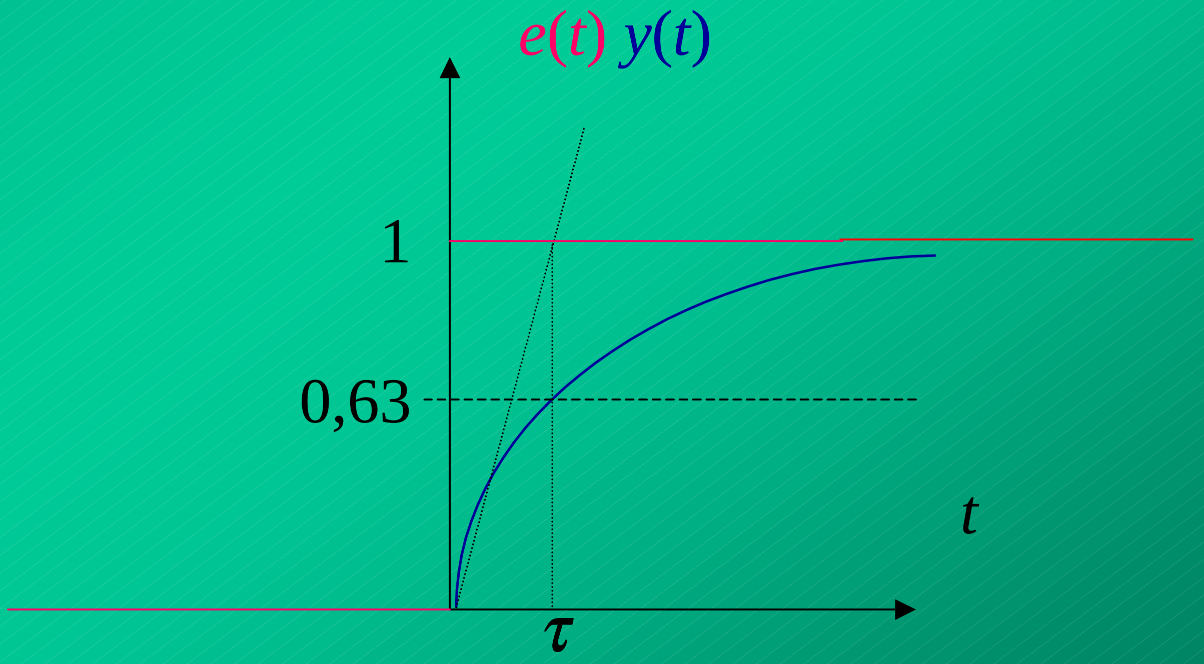
Etude particulière de systèmes du premier ordre :

réponse à quelques entrées typiques

$$u(t) \longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{K}{1+\tau s}} \longrightarrow y(t)$$

• **Réponse à un échelon unité :** $u(t) = e(t)$

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{K}{(1+\tau s)s} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{1+\tau s}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = K\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$



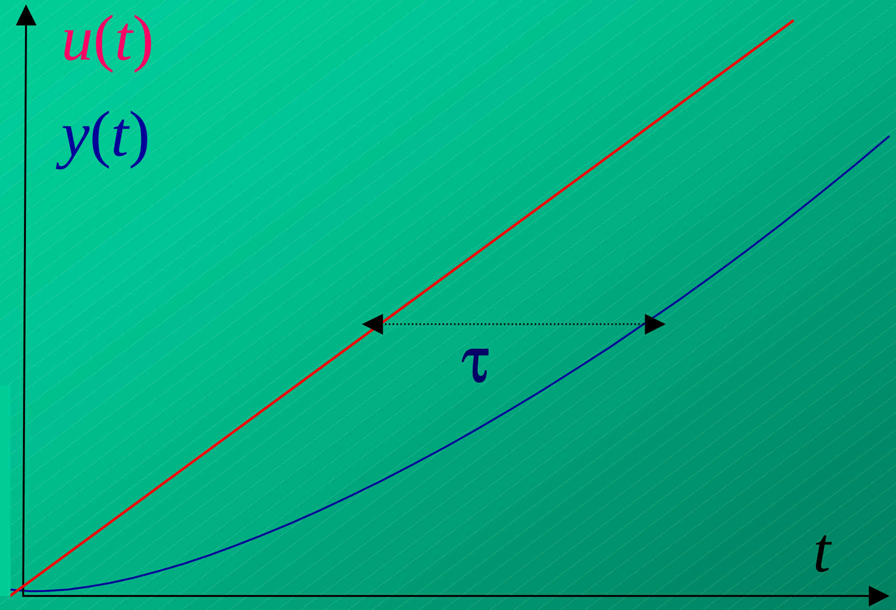
Etude particulière de systèmes du premier ordre :

réponse à quelques entrées typiques

• **Réponse à une rampe :** $u(t) = A.t$

$$U(s) = \frac{A}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{KA}{(1+\tau s)s^2} = KA\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s+\frac{1}{\tau}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = KA\left[t - \tau + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$



Etude particulière des systèmes du deuxième ordre

Réponse à une entrée échelon

$$\tau^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\tau\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=Ku \quad\Rightarrow\quad u(t)\longrightarrow \boxed{F(s)=\frac{K}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}} \longrightarrow y(t)$$

$$u(t) = A.e(t) \quad\Rightarrow\quad Y(s)=\frac{KA}{\left(\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1\right)s}=\frac{KA}{s}+\frac{\alpha}{s-s_1}+\frac{\beta}{s-s_2}$$

avec $s_1=-\frac{\zeta}{\tau}+\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}$ et $s_2=-\frac{\zeta}{\tau}-\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\tau}$ et **$y(t) = KA + A_1.e^{s1t} + A_2.e^{s2t}$**

Importance de la place de ζ par rapport à 1

Etude particulière des systèmes du deuxième ordre

Réponse à une entrée échelon (suite)

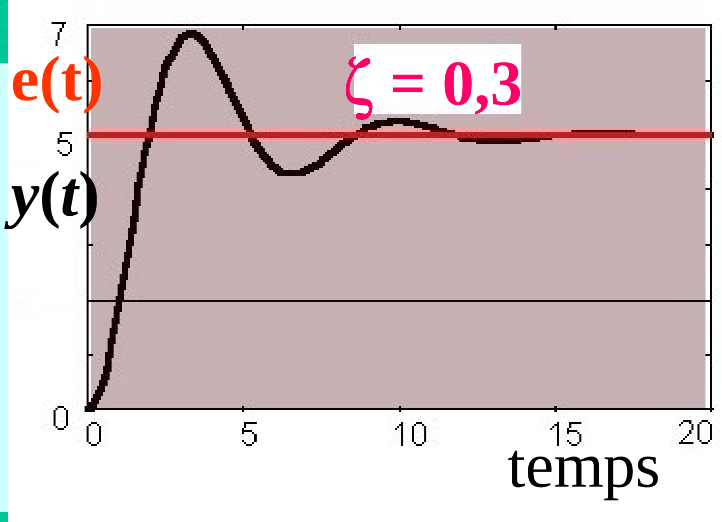
$0 < \zeta < 1$

Régime sous-amorti

2 racines complexes conjuguées à partie réelle négative

-amortissement : $-\zeta / \tau$

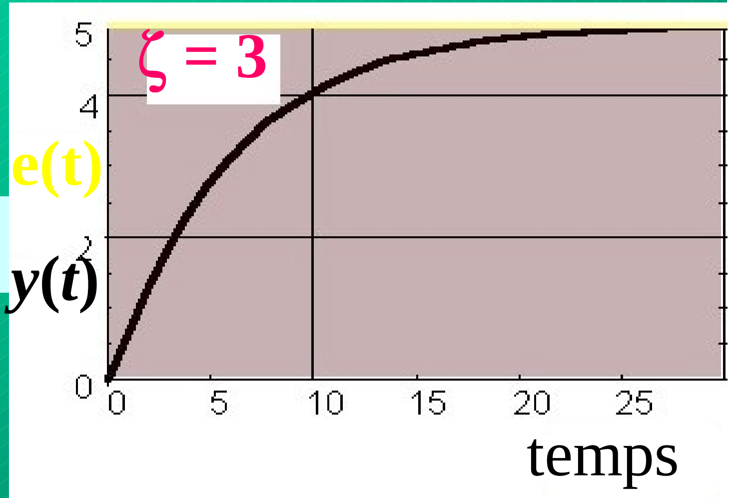
-Période : $\dfrac{2\pi\tau}{\sqrt{\left|\zeta^2 - 1\right|}}$



$\zeta > 1$

Régime sur-amorti

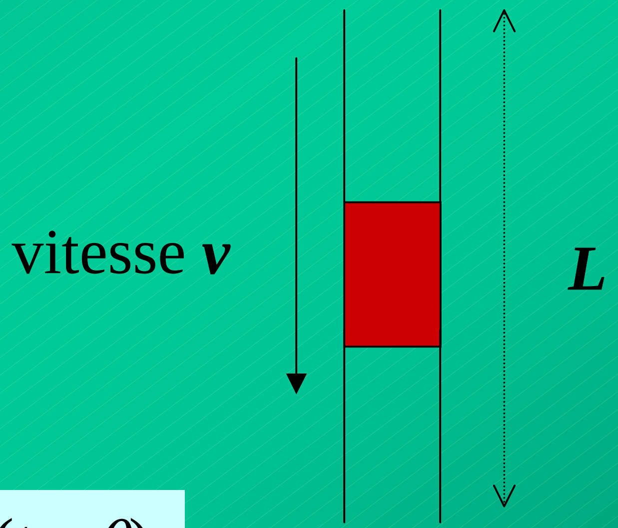
2 racines réelles négatives

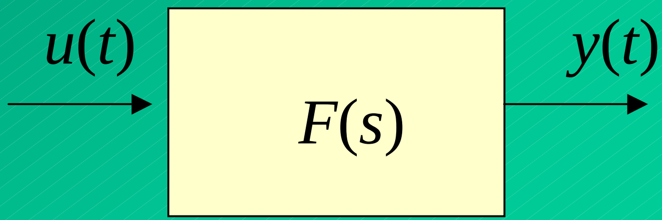


Système avec retard

Exemples :

- **écoulement piston**
- **tout système avec transport convectif**





$$\Rightarrow \quad y(t) = u(t-\theta)$$

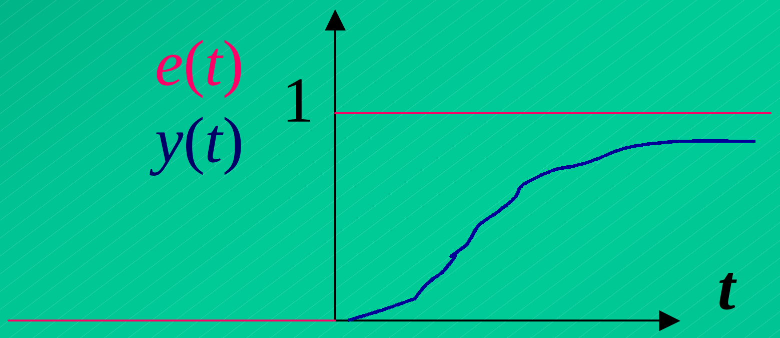
$$\text{retard : } \theta = \frac{L}{v}$$

Théorème de translation $\Rightarrow F(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \exp(-\theta s)$

Fonction de transfert associée à un « retard pur »

Représentations simplifiées d'un système quelconque

Réponse typique d'un système à une entrée échelon unité



Correspond en première approximation (problème d'identification):

•soit à un premier ordre avec retard $$F(s) = \frac{K}{1+\tau s}\exp(-\theta s)$$

•soit à un système d'ordre n $$F(s) = \frac{K}{(1+\tau s)^n}$$

Linéarisation de systèmes non linéaires

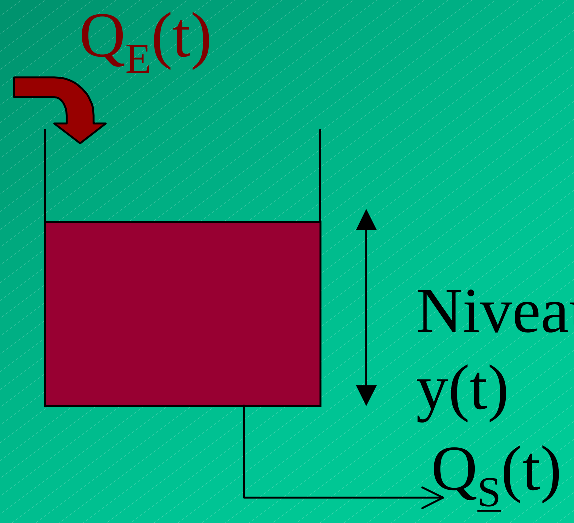
Problématique :

Le calcul opérationnel (transformée de Laplace, fonctions de transfert,…) n’est pas adapté a priori à des **systèmes non linéaires** ; or, ceux-ci sont très présents dans le monde physique et industriel.

La plupart des systèmes réels fonctionnant **au voisinage de valeurs nominales**, on peut, **par linéarisation autour de ces valeurs**, se ramener au cadre du calcul opérationnel

Linéarisation de systèmes non linéaires (suite)

Exemple : vidange naturelle d'un réservoir



$$Q_S(t) = E\sqrt{y(t)}$$ (Toricelli)

$$\Omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + E\sqrt{y(t)} = Q_E(t)$$ **Non linéaire**

Soient les écarts :

Etat stationnaire : $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{et} \quad y_{st} = \left(\frac{Q_{st}}{E}\right)^2$$

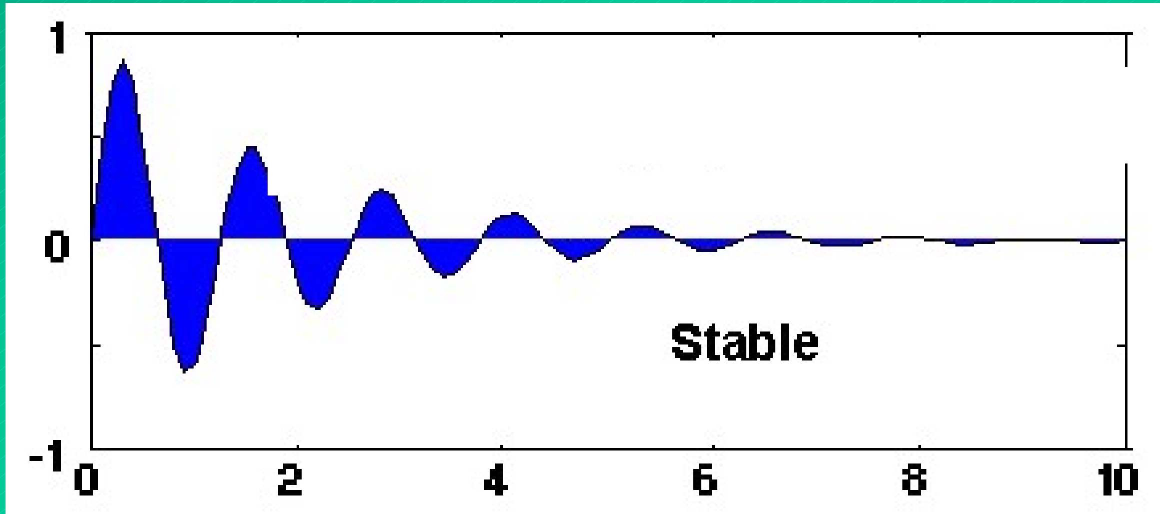
$$\tilde{Q} = Q_E - Q_{Est}$$
$$\tilde{y} = y - y_{st}$$

$$\frac{2\sqrt{y_{st}}}{E}\Omega\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} + \tilde{y} = \frac{2\sqrt{y_{st}}}{E}\tilde{Q}$$ **Relation linéarisée**

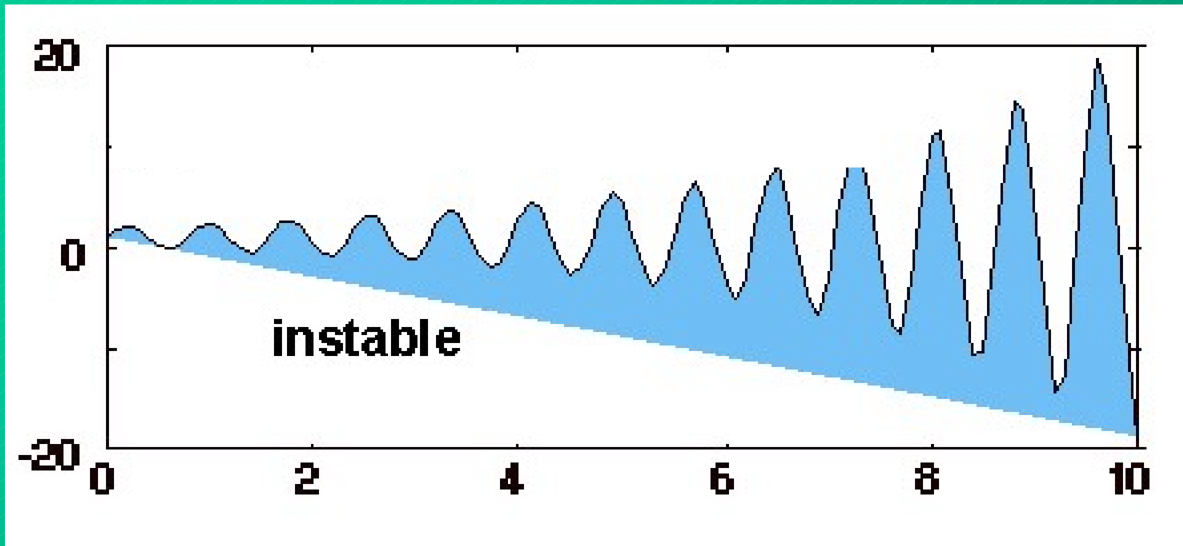
Stabilité d'un système

Définition (exemples)

stabilité asymptotique



instabilité asymptotique



Stabilité d’un système (suite)

Deux critères de stabilité

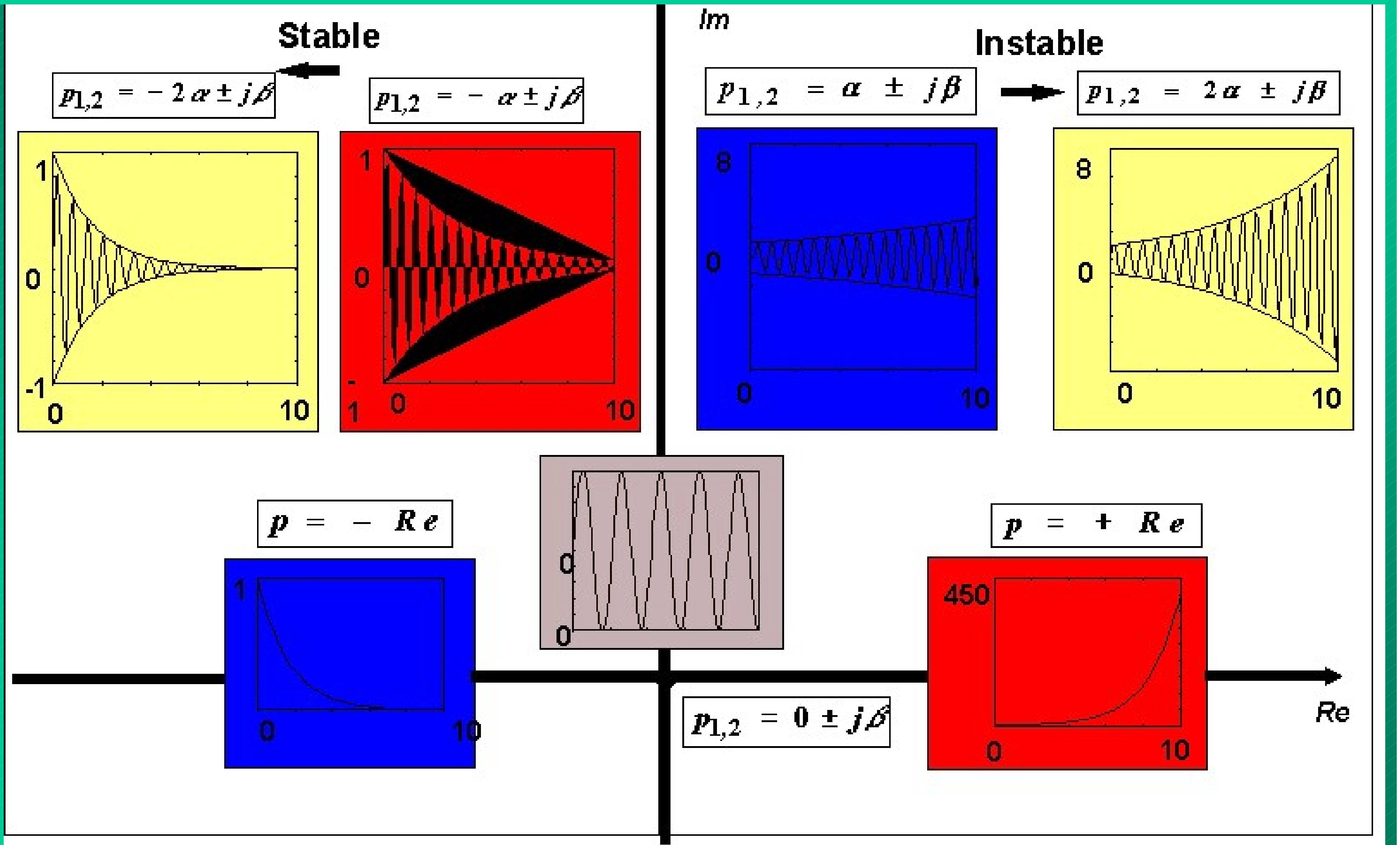
Placement des pôles :

Lorsque la fonction de transfert se présente sous la forme d’une fraction rationnelle….

Le critère de stabilité impose que les pôles de la fonction de transfert (les zéros du polynôme dénominateur) soient ou bien tous réels négatifs, ou bien complexes à partie réelle négative.

Stabilité d'un système

Critère de placement des pôles (suite)



Stabilité d’un système (suite)

Critère du revers de Nyquist

•**Mettre la fonction de transfert sous la forme** $F(s) = \dfrac{Z(s)}{1+Z(s)}$

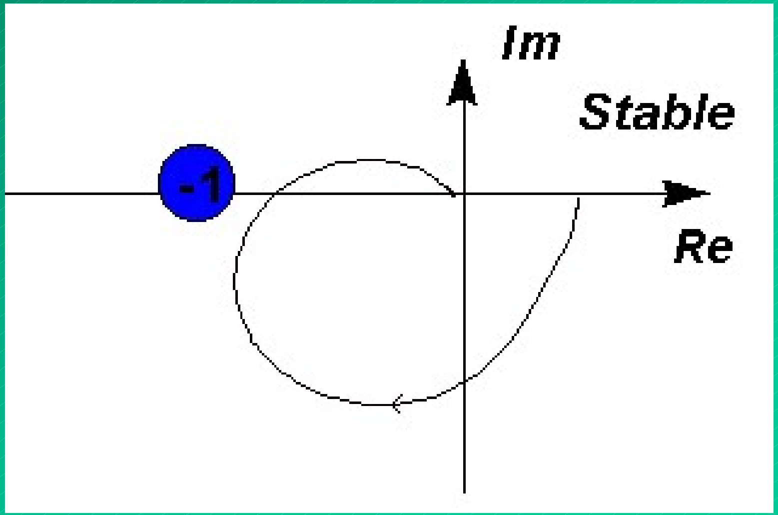
• **Tracer le diagramme de Nyquist de $Z(s)$ ($Z(j\omega)$ en plan complexe)**

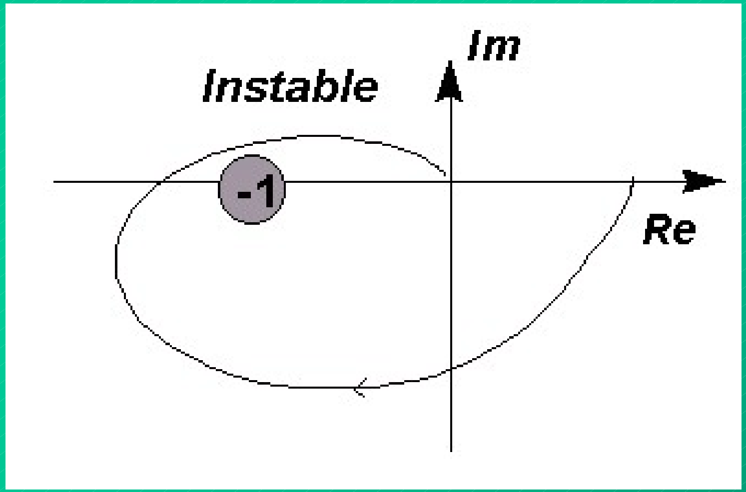
• **Repérer la première intersection (à ω croissant) de la courbe de Nyquist avec l’axe des réels négatifs**

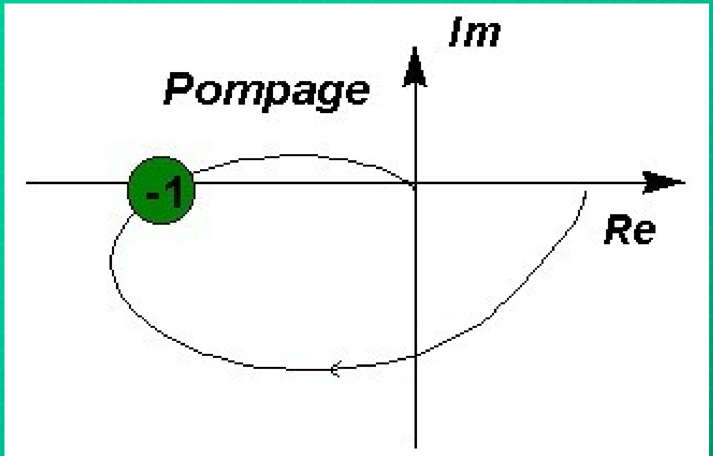
• **Si l’abscisse de l’intersection est comprise entre 0 et –1, il y a stabilité ; si elle est au delà de –1, il y a instabilité**

Stabilité d'un système (suite)

Critère du revers de Nyquist (suite) : exemples

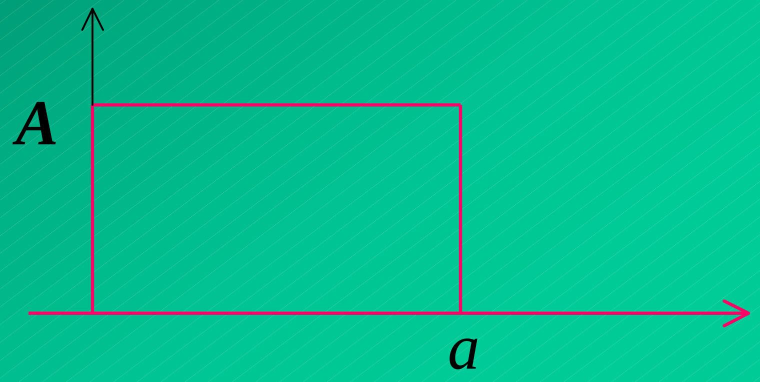






Exercices sur la transformée de Laplace

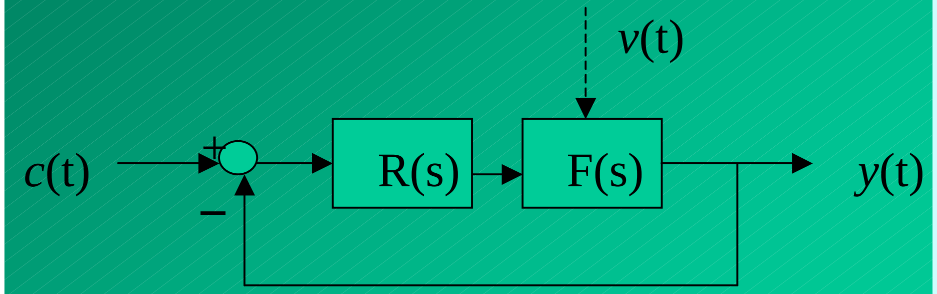
1) Trouver sans calcul la transformée de :



2) Trouver l'antécédent de : $F(s)=\frac{3s}{s^2+4s+3}$

Exercices relatifs à des boucles de régulation proportionnelle

Régulation d'un système du premier ordre avec retard



$R(s) = K_R$ $v(t) = 0$ $F(s) = \frac{K}{1+\tau s}\exp(-\theta s)$

Idée : corriger l'entrée du système (F) par un signal proportionnel mais de signe opposé à l'écart entre la consigne et le signal de sortie

$$Y(s) = \frac{\frac{K}{1+\tau s}e^{-\theta s}K_R}{1+\frac{K}{1+\tau s}e^{-\theta s}K_R}C(s)$$

Questions :

1) Le système partant de l'état de référence (0, 0), comment réagit-il asymptotiquement à un changement échelon de la consigne ?
2) Un des objectifs de la régulation étant de rejoindre la consigne, comment jouer sur K_R pour obtenir ce résultat ?
3) Montrer que, ce faisant, on se heurte à un problème de stabilité

Régulation d'un système du premier ordre avec retard (suite)

Eléments de réponse :

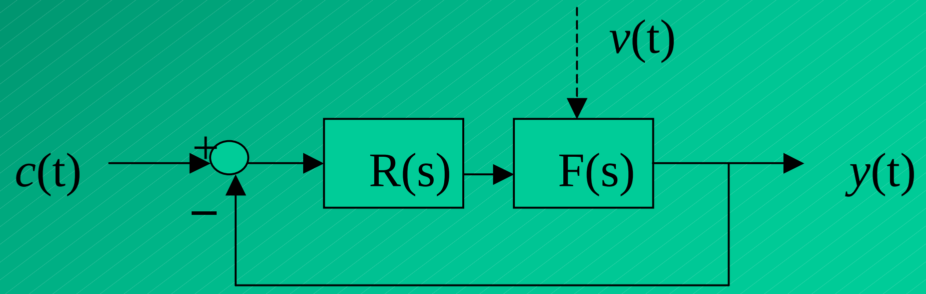
1) Appliquer le théorème de l'état final et montrer que le système ne rejoint pas la consigne (erreur dynamique)
2) L'erreur dynamique est fonction décroissante du gain du régulateur (qu'on a a priori intérêt à prendre très grand)
3) Appliquer le critère de Nyquist en deux temps :

   a) montrer que l'intersection avec l'axe des réels négatifs correspond à $\omega \approx \frac{\pi}{2\theta}$

   b) en déduire la condition nécessaire de stabilité généralement adoptée : $KK_R < \frac{\pi\tau}{2\theta}$

Exercices relatifs à des boucles de régulation proportionnelle

Régulation d'un système du troisième ordre



$$F(s) = \frac{K}{(1+\tau s)^n}$$

$$R(s) = K_R$$

$$v(t) = 0$$

Question :

Montrer que la limite de stabilité du système est atteinte pour $KK_R = 8$

a) En utilisant le critère de Nyquist

b) En utilisant la règle de placement des pôles et en admettant que le seuil d'instabilité est atteint lorsque deux des pôles sont imaginaires purs conjugués