Chap φ C.I.R.A. 2 :

DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

L'écoulement des gaz à travers les conduits ainsi qu'à travers des machines thermiques telles que les pompes, les ventilateurs et autres machines tournantes, mérite une attention particulière par rapport à l'écoulement des liquides.

Nous avions signalé dès le début du cours de mécanique des fluides, que l'étude des fluides incompressibles pouvait être menée par des considérations « ***purement mécaniques*** » tandis qu'une étude des fluides compressibles passait nécessairement par des « ***considérations thermodynamiques*** ». Nous disposons maintenant des outils indispensables pour aborder cette dernière partie ………..

Dans ce chapitre, nous appellerons « **gaz** » indistinctement un gaz ou une vapeur.
RAPPEL : une vapeur peut être liquéfiée par transformation isotherme, alors qu'un gaz non. Ce qui revient à dire qu'en-dessous de la température critique, on a une vapeur, alors qu'au-dessus c'est un gaz.

I EQUATIONS ET HYPOTHESES

1) frontière « compressible – incompressible »

Le critère est la comparaison avec la vitesse du son dans le même milieu, et dans les mêmes conditions de température et de pression :

- si le gaz a une vitesse v < 0,3. v_{SON} alors il peut être considéré comme incompressible (et donc $\rho_{GAZ} \approx C^{ste}$), on peut lui appliquer les équations déjà vues
- si le gaz a une vitesse v > 0,3. v_{SON} alors il doit être considéré comme compressible (et donc $\rho_{GAZ} = \rho(p,T,POINT\_CHOISI)$), il faut établir de nouvelles équations

REMARQUE :

dans le cours d'instrumentation, nous avions déjà signalé qu'un gaz, considéré comme incompressible avait certes une masse volumique constante, mais fortement dépendante des conditions de pression et de température → correction de débits, étalonnage des instruments alors que le caractère compressible introduit en plus une dépendance avec le point d'observation. Il est important de ne pas perdre de vue cette distinction !

2) Point de vue mécanique : l'équation d'Euler

Cette équation, établie grâce à un bilan de forces sur une cellule de fluide sans aucune hypothèse sur la compressibilité (cf. poly. 1ère année) a pour expression :

$$dp + \rho.v.dv + \rho.g.dz = 0$$

C'est cette forme différentielle qui nous a permis d'établir, après intégration, le théorème de Bernoulli.
Mais, ici, puisque la masse volumique ne peut être considérée comme la même dans tout le milieu, on ne peut l'intégrer directement. Il est nécessaire d'avoir d'autres équations comportant ces informations …..

3) Point de vue mécanique : l'équation de continuité

Là encore, il s'agit d'une équation à laquelle nous sommes habitués. Elle exprime le fait que la masse est conservée d'un point 1 à un point 2 :

$$Q_{m,1} = Q_{m,2}$$

ce qui peut aussi s'exprimer par :

$$\rho_1.S_1.v_1 = \rho_2.S_2.v_2$$

Le débit volumique ne saurait être conservé puisque l'égalité ci-dessus n'admet pas de simplification par le terme « ρ » ! ! !
Utilisons une écriture plus fructueuse :

$$Q_m = \rho.S.v = C^{ste}$$

puisqu'elle nous permet la différenciation suivante (les trois grandeurs étant susceptibles de varier) :

$$d\rho.S.v + \rho.dS.v + \rho.S.dv = 0$$

ou encore, après division par $\rho.S.v$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0}$$

équation reliant la masse volumique « ρ » la section « S » et la vitesse « v » du fluide au point considéré.

4) Point de vue thermodynamique : le premier principe

Un bref résumé des différentes expressions du premier principe s'impose !

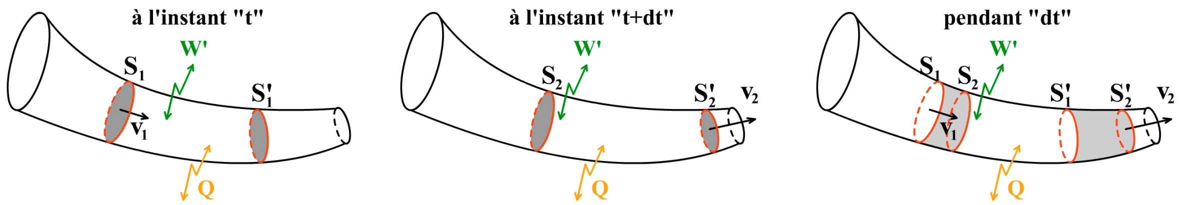
a- 1^er^ principe pour un système ne possédant que de l'énergie interne :
la première forme que nous avons étudiée, par soucis de simplification,

$$dU = \delta W + \delta Q \quad \textbf{\textit{ou sous forme intégrée :}} \quad \Delta U_{1\to 2} = W_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$$

b- 1^er^ principe pour un système quelconque :
le système, en plus de son énergie interne peut posséder de l'énergie cinétique et/ou de l'énergie potentielle dont il faut tenir compte dans les échanges avec l'extérieur :

$$dU + dE_C + dE_P = \delta W + \delta Q \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \Delta U_{1\to 2} + \Delta E_{C,1\to 2} + \Delta E_{P,1\to 2} = W_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$$

c- 1^er^ principe pour un système ouvert exprimé à partir de l'enthalpie :
pour l'étude des cycles thermodynamiques, l'enthalpie s'est avéré un puissant outil pour les calculs de quantités de chaleur, et des travaux des machines thermiques.
Refaisons la démonstration :



Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et $S_1^{'}$ à l'instant « t » et entre S_2 et $S_2^{'}$ à l'instant « t+dt ». Durant le laps de temps « dt » cette tranche échange un certain travail W (sur le schéma on a fait ressortir W', le travail excluant le travail des forces de pression, l'intérêt apparaîtra en fin de démonstration) et une certaine quantité de chaleur Q avec l'extérieur.
D'un point de vue mécanique et thermique, tout se passe comme si le petit volume dV compris entre S_1 et S_2 à « t » se retrouvait entre $S_1^{'}$ et $S_2^{'}$ à « t+dt ».

L'écriture du 1^{er} principe donne :

$$\Delta U + \Delta E_C + \Delta E_P = W + Q \quad \text{soit} \quad (U_2 - U_1) + (E_{P,2} - E_{P,1}) + (E_{C,2} - E_{C,1}) = W + Q$$

or, W est le travail total, somme du travail de transvasement (travail total échangé entre le système et l'extérieur) et du travail des forces de pression dû au reste du fluide :

$$W = W' + (p_1.V_1 - p_2.V_2)$$

en regroupant les termes, on obtient donc :

$$(U_2 - U_1) + (E_{P,2} - E_{P,1}) + (E_{C,2} - E_{C,1}) = W' + (p_1.V_1 - p_2.V_2) + Q$$

$$(U_2 + p_2.V_2) - (U_1 + p_1.V_1) + (E_{P,2} - E_{P,1}) + (E_{C,2} - E_{C,1}) = W' + Q$$

qui amène l'enthalpie H = U + p.V :

$$H_2 - H_1 + (E_{P,2} - E_{P,1}) + (E_{C,2} - E_{C,1}) = W' + Q$$

ou sous forme plus condensée :

$$\Delta H + \Delta E_C + \Delta E_P = W' + Q \quad \text{(éq. 1)}$$

d- expression du travail de transvasement W' :

nous connaissons déjà l'expression du travail des forces de pression : $W_{pression} = \int^{2} -p.dV$

Existe-t-il une expression pour le travail de transvasement ?
Partons de la définition de l'enthalpie :

$$H = U + p.V \Rightarrow dH = dU + p.dV + V.dp$$

or, le 1^{er} principe permet :

$$dH = -p.dV + \delta Q - (dE_P + dE_C) + p.dV + V.dp$$

$$dH + dE_P + dE_C = \delta Q + V.dp$$

soit par intégration :

$$\Delta H + \Delta E_P + \Delta E_C = Q + \int V.dp \quad \text{(éq. 1)}$$

Une comparaison de éq. 1 et éq. 2 permet d'écrire :

$$\boxed{W' = \int_1^2 V.dp}$$

expression du travail de transvasement

Le travail de transvasement représente le travail qui doit être fourni contre les forces de pression extérieures et intérieures pour provoquer le transvasement de l'unité de masse de fluide de l'état 1 à l'état 2.

On peut aussi retrouver ce résultat à partir du théorème de l'énergie cinétique.

e- 1er principe pour un système ouvert exprimé en grandeurs massiques :
en notant par des petites lettres, les grandeurs par unité de masse de fluide, l'expression du 1er principe devient :

$$\Delta h + \Delta e_P + \Delta e_C = q + \int V_m . dp$$

ou encore, en remarquant que V_m, volume massique est l'inverse de la masse volumique :

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_P + \Delta e_C = q + \int \frac{dp}{\rho}}$$

f- lien entre le 1er principe et le théorème de Bernoulli :
souvent, l'écoulement se fait ***sans échauffement*** (q = 0 ; $T \approx C^{ste}$ et donc $u \approx C^{ste}$ pour les liquides et les G.P. !). Si de plus, il n'y a ***pas de machines thermiques*** : $\int \frac{dp}{\rho} = 0$ et que le fluide peut être considéré comme ***incompressible*** ($\rho = C^{ste}$) il reste :

$$[(u_2 + \frac{p_2}{\rho}) - (u_1 + \frac{p_1}{\rho})] + (\frac{1}{2}.v_2^2 - \frac{1}{2}.v_1^2) + (g.z_2 - g.z_1) = 0$$

soit : ($u_2 \approx u_1$)

$$\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}.v_2^2 - \frac{1}{2}.v_1^2 + g.z_2 - g.z_1 = 0$$

qui donne bien le théorème de Bernoulli :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}.v^2 + g.z = C^{ste}$$

De plus, le 1er principe nous permet de comprendre l'origine des termes introduits dans le théorème de Bernoulli pour tenir compte de la perte de charge, et du travail d'une machine hydraulique ……. (voir poly.).

Mais, encore une fois, il nous manque des éléments pour appliquer cela aux fluides compressibles.
En effet, nous devons à présent adopter un modèle pour le fluide, et savoir quelle type de transformation il subit.

5) Un modèle pour le fluide compressible : hypothèse du G.P.
C'est évidemment le modèle du gaz parfait que nous adopterons.

Première remarque : les masses volumiques des gaz sont de l'ordre de 1000 fois plus faibles que celles des liquides. L'influence de la pesanteur y joue donc un rôle 1000 fois plus faible.

Deuxième remarque : les forces de viscosité des G.P. sont rigoureusement nulles, mais il n'en va pas de même pour les autres gaz.

Nous avons aussi l'équation supplémentaire : $p.V_m = n.R.T$, ou encore $p = \frac{\rho}{M}.R.T$ avec « M » masse molaire du G.P.

On peut introduire la constante massique du G.P. : $r = \frac{R}{M}$ alors

$$\boxed{p = \rho.r.T}$$

a- chaleurs spécifiques massiques à volume constant c_V et à pression constante c_P :
nous avons appris que pour un G.P. :

$$du = c_V.dT \quad ; \quad dh = c_P.dT$$

et nous avons introduit la constante adiabatique γ

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

b- expression des chaleurs spécifiques pour un G.P. :
la relation de Mayer s'exprime par :

$$c_P - c_V = r$$

qui, combinée avec la définition de la constante adiabatique ci-dessus donne :

$$c_P = \frac{\gamma.r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c_V = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour étudier les fluides compressibles.

II EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE POUR LES GAZ

1) Mise en forme du 1er principe de la thermodynamique

Celui-ci s'exprime par : $\Delta h + \Delta e_P + \Delta e_C = q + \int \frac{dp}{\rho}$, or, en négligeant les forces de pesanteur, la variation d'énergie potentielle devient négligeable et il reste :

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_C = q + \int \frac{dp}{\rho}}$$

2) Application à un écoulement adiabatique

Pour un écoulement adiabatique ($q = 0$) en l'absence de machine ($\int \frac{dp}{\rho} = 0$, pas de travail de transvasement, ou dit autrement $w = 0$), alors :

$$\Delta h + \Delta e_C = 0$$

ou encore :

$$(h_2 - h_1) + (\frac{1}{2}.v_2^2 - \frac{1}{2}.v_1^2) = 0$$

qui se résume par :

$$\boxed{h + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste}}$$

le long d'une ligne de courant

La somme « $h + \frac{1}{2}v^2$ » est appelée énergie totale du fluide. Ainsi, dans un écoulement adiabatique, l'énergie totale du fluide est constante.
Cette équation (parfois appelée ***équation de ZEUNER***) est valable que le fluide soit visqueux ou non. Elle pourra en particulier s'appliquer à la vapeur d'eau ou à un fluide frigorigène.
Remarquons aussi que cette somme fait intervenir la grandeur thermodynamique « h » (« v » étant une grandeur mécanique), c'est pourquoi il n'y a pas de terme de perte de charge dans cette équation de conservation.

3) Ecoulement adiabatique pour un G.P.

Nous ne faisons aucune hypothèse ici sur la réversibilité de l'écoulement. Il est donc considéré comme irréversible (voir remarque en fin de démonstration).
Les équations dont nous disposons sont :

$$h + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste} \quad (1) \quad ; \quad dh = c_P.dT \quad (2) \quad ; \quad c_P = \frac{\gamma.r}{\gamma - 1} \quad (3) \quad ; \quad p = \rho.r.T \quad (4)$$

puisque $h(T = 0) = 0$, l'équation (2) implique :

$h = c_P.T$ soit, avec les équations (3) et (4) : $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{p}{\rho}$ qui combinée avec (1) donne :

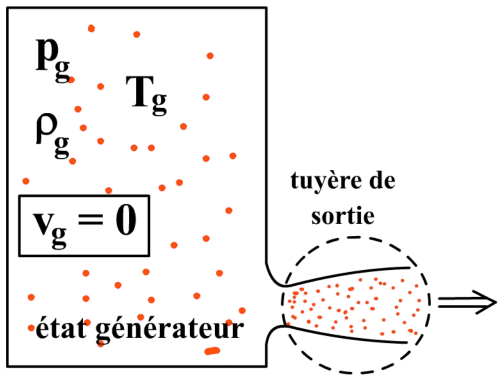
$$\boxed{\frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste}}$$

Relation de Barré de Saint Venant

REMARQUE :
cette équation reste valable pour les écoulements adiabatiques réversibles, la démonstration est faite en annexe.

4) Etat générateur

Cette notion d'état générateur est particulière aux fluides compressibles.
On peut en avoir une représentation physique en supposant que l'écoulement est alimenté par un réservoir de grande section, dans lequel la vitesse est pratiquement nulle :



A l'intérieur du réservoir , les caractéristiques (indicées « g ») sont celles de l'état générateur.

Notamment, la vitesse d'écoulement v_g y est quasi-nulle :

$$v_g = 0$$

On peut donc exprimer la constante de la relation de Barré de Saint Venant, grâce à cet état générateur :

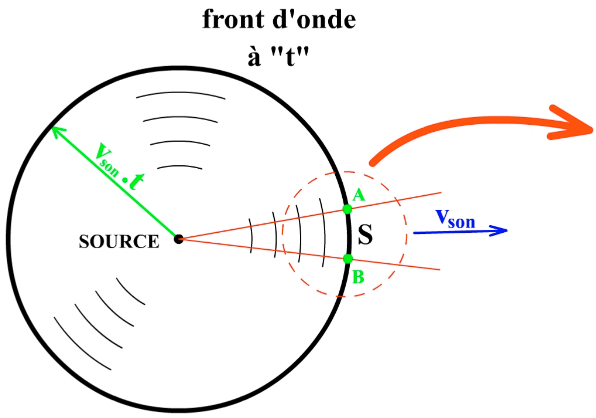
$$\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}.v^2 = C^{ste} = \frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p_g}{\rho_g}$$

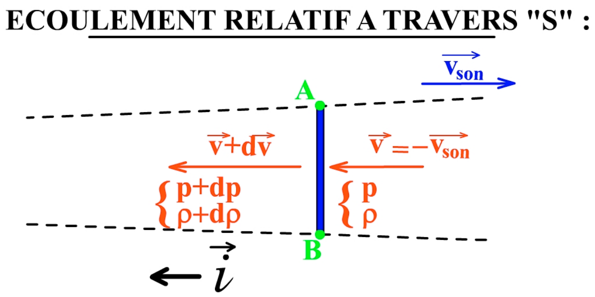
III CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS

1) Vitesse de propagation du son

Puisque nous étudions les écoulements des gaz, il faut maintenant se poser la question de l'existence d'une vitesse « frontière » …….. , ou dit autrement, le milieu (le gaz dans des conditions p, T …..) peut-il subir des déplacements de masses sans répercussion sur lui même ?

Pour cela, imaginons un milieu indéfini homogène et isotrope :





Une perturbation est générée depuis une source (une surpression par exemple) qui va se propager depuis ce point. Nous savons que cette propagation se fait à vitesse constante v_{SON}.
On désigne dans le milieu non perturbé, la pression par « p » et la masse volumique par « ρ », et dans le milieu perturbé (en amont, donc) « p+dp » et « $\rho + d\rho$ ».

Raisonnons sur l'écoulement RELATIF du milieu non perturbé : on prend pour repère la petite surface « S », et on analyse l'écoulement du milieu non perturbé au travers de cette surface.

- la conservation du débit massique s'exprime par : $\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dS}{S}+\frac{dv}{v}=0$ qui peut se simplifier ici, puisque la section S ne varie pas sous l'action de la perturbation (onde longitudinale) :

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dv_{SON}}{v_{SON}}=0 \quad (1)$$

- le théorème d'Euler en régime stationnaire (voir poly) : $Q_m(\overrightarrow{v_s}-\overrightarrow{v_e})=\sum_{système}\overrightarrow{F_{ext}}$ qui s'exprime par projection sur $\vec{i}$: $Q_m(v_s-v_e).\vec{i}=p.S.\vec{i}-(p+dp).S.\vec{i}$ soit

$$\rho.v_{SON}.dv_{SON}+dp=0 \quad (2)$$

En éliminant « dv_{SON} » entre (1) et (2), on obtient :

$$-v_{SON}^2.d\rho+dp=0$$

d'où :

$$\boxed{v_{SON}^2=\frac{dp}{d\rho}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{v_{SON}=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}}$$

APPLICATION DANS LE CAS D'UN G.P. :

Pour les gaz, l'évolution est très rapide si bien que la propagation peut être considérée comme adiabatique. De plus, les frottements étant négligeables, on pourra considérer la transformation comme isentropique :

$$p.v^{\gamma}=C^{ste}=\frac{p}{\rho^{\gamma}}$$

qui dérivée donne :

$$\frac{dp}{d\rho}=\frac{\gamma.p}{\rho}$$

ainsi :

$$\boxed{v_{SON}=\sqrt{\frac{\gamma.p}{\rho}}=\sqrt{\gamma.r.T}}$$

A.N. : pour l'air, dans les conditions normales, p = 1,013 bar, $\gamma=1{,}4$ et $\rho=1{,}293 kg.m^{-3}$
on obtient $v_{SON}=331 m/s$

REMARQUE : dans les tuyaux de faibles sections, les frottements ne sont plus négligeables, et il y a des échanges avec la paroi. On pourra constater des écarts avec la valeur théorique.

2) Nombre de Mach. Classification des écoulements

On définit le nombre de Mach par :

$$\boxed{M_{ach} = \frac{v}{v_{SON}}}$$

C'est le rapport de la vitesse du fluide au point considéré par la vitesse locale du son.

On distingue alors trois types d'écoulements :

- Si $M_{ach} < 1$ ($v < v_{SON}$) : l'écoulement est dit **SUBSONIQUE**
- Si $M_{ach} = 1$ ($v = v_{SON}$) : l'écoulement est dit **SONIQUE** ou **CRITIQUE**
- Si $M_{ach} > 1$ ($v > v_{SON}$) : l'écoulement est dit **SUPERSONIQUE**

3) Autre formulation de la relation de Barré de Saint Venant

En considérant toujours l'écoulement du G.P. comme adiabatique, en partant de :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}.v^2=\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p_g}{\rho_g} \quad \text{et puisque} \quad v_{SON}^2=\frac{\gamma.p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{SON}^2}{\gamma-1}+\frac{v^2}{2}=\frac{v_{SON,géné}^2}{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{v_{SON}^2}+\frac{2}{\gamma-1}=\frac{2}{\gamma-1}.\frac{v_{SON,géné}^2}{v_{SON}^2}$$

et comme : $v_{SON}=\sqrt{\gamma.r.T}$ et $v_{SON,géné}=\sqrt{\gamma.r.T_{géné}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{ach}^2.\frac{\gamma-1}{2}+1=\frac{T_{géné}}{T}}$$

pour un écoulement adiabatique quelconque

Si de plus, l'écoulement est isentropique, on peut injecter la relation :

$$p^{1-\gamma}.T^{\gamma}=C^{ste} \Rightarrow \frac{T_{géné}}{T}=\left(\frac{p_{géné}}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{\rho^{\gamma-1}}=C^{ste} \Rightarrow \frac{T_{géné}}{T}=\left(\frac{\rho_{géné}}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

4) Application à l'état critique

Pour un point critique, c'est à dire où $\mathcal{M}=1$, la relation de Barré de Saint Venant s'écrit :

$$\frac{T_{géné}}{T_{critique}}=1+\frac{\gamma-1}{2}=\frac{\gamma+1}{2}$$

Pour l'air, avec $\gamma=1{,}405$ on obtient :

$$\frac{T_{critique}}{T_{géné}}=0{,}8316$$

Remarquons aussi que la vitesse critique dépend uniquement de la température génératrice :

$$v_{critique} = v_{SON} = \sqrt{\gamma . r . T_{critique}} = \sqrt{\frac{2.\gamma}{\gamma+1}.r.T_{géné}}$$

IV APPLICATION AUX TUYERES

1) Définition, hypothèses

Une tuyère est un appareil où l'énergie cinétique d'un fluide est augmentée au cours d'une évolution adiabatique. Cette augmentation d'énergie entraîne une chute de pression et se réalise grâce à une modification appropriée de la section d'écoulement.

Un diffuseur est un appareil qui a la fonction contraire (augmentation de la pression en réduisant la vitesse d'écoulement), mais les 2 termes seront confondus, ici, sous l'appellation « tuyère ».

HYPOTHESE DE L'ECOULEMENT ISENTROPIQUE UNIDIMENSIONNEL :

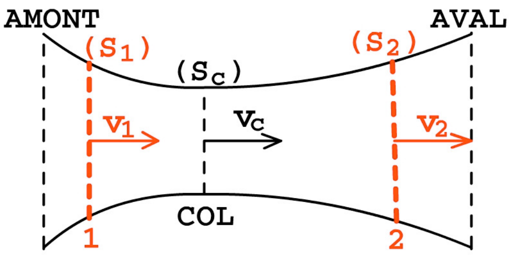
L'écoulement est supposé se faire par tranches planes, c'est à dire que les grandeurs p, ρ, T et v sont uniformes dans chaque section, et sont donc uniquement fonction de l'emplacement de la section.

2) Profil de la tuyère

On dispose des équations suivantes :

- conservation de la masse
- équation de Barré de Saint-Venant
- équation caractéristique du fluide (G.P. ici)
- la loi thermodynamique de l'écoulement (isentropique ici)

A partir de ces équation, on peut trouver la loi « S = f(x) » de variation de la section de la tuyère.



On écrit les équations entre deux points 1 et 2

L'équation de continuité donne :

$$\rho_1.S_1.v_1 = \rho_2.S_2.v_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.\frac{v_2}{v_1}$$

Par définition du nombre de Mach :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M_{ach,2}}{M_{ach,1}}.\frac{v_{SON,2}}{v_{SON,1}} = \frac{M_{ach,2}}{M_{ach,1}}.\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

pour un écoulement isentropique :

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = C^{ste} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

et, en faisant intervenir l'équation de Barré de Saint-Venant en 1 et 2 :

$$M_{ach,1}^2.\frac{\gamma-1}{2}+1=\frac{T_{géné}}{T_1} \quad \text{et} \quad M_{ach}^2.\frac{\gamma-1}{2}+1=\frac{T_{géné}}{T}$$

on arrive à :

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{M_{ach,2}}{M_{ach,1}}.\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}.M_{ach,1}^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}.M_{ach,2}^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2.(\gamma-1)}}$$

En général, on choisit comme référence la section S_C du col de la tuyère, lorsque le nombre de Mach y est égal à 1 :

$$\boxed{\frac{S}{S_C}=\frac{1}{M_{ach}}.\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{\gamma+1}{2.(\gamma-1)}}}$$

3) Théorème de HUGONIOT

a- relation entre dS et dv :

partant de

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dS}{S}+\frac{dv}{v}=0 \text{ et de } \frac{dp}{\rho}+v.dv=0$$

comme la vitesse du son est $v_{SON}^2=\frac{dp}{d\rho}$ alors $dp=v_{SON}^2.d\rho \Rightarrow vdv=-v_{SON}^2.\frac{d\rho}{\rho}$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho}=-\frac{v.dv}{v_{SON}^2}=-\frac{v^2}{v_{SON}^2}\frac{dv}{v}=-M_{ach}^2.\frac{dv}{v}$$

de plus, $\frac{dS}{S}=-\frac{dv}{v}-\frac{d\rho}{\rho}$ entraîne :

relation 1 : $$\boxed{\frac{dS}{S}=\frac{dv}{v}(M_{ach}^2-1)}$$

b- relation entre dv et dp :

cette fois, on écrit que : $-\frac{dp}{\rho}=v.dv$ et $\frac{dv}{v}=-\frac{1}{v_{SON}^2}.\frac{dp}{\rho}=-\frac{1}{M_{ach}^2.v_{SON}^2}.\frac{dp}{\rho}=-\frac{dp}{M_{ach}^2.\gamma.p}$

finalement :

relation 2 : $$\boxed{\frac{dv}{v}=-\frac{1}{M_{ach}^2.\gamma}.\frac{dp}{p}}$$

INTERPRETATION

→ *pour la relation 2 :*

“dp” et “dv” sont toujours de signes contraires. Autrement dit, la pression et la vitesse varient dans tous les cas en sens contraires

→ *pour la relation 1: le théorème d’Hugoniot*

- si $M_{ach} < 1$ (vitesses subsoniques), la vitesse varie en sens inverse de la section

  $$\mathbf{dv > 0 \text{ si } dS} < 0$$

- si $M_{ach} > 1$ (vitesses supersoniques), la vitesse varie dans le même sens que la section

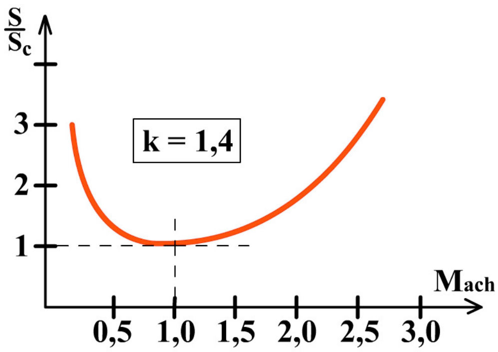
  $$\mathbf{dv > 0 \text{ si } dS} > 0$$

- $v = v_{SON}$ uniquement là où dS = 0, c’est à dire pour un extremum de la section. Mais, d’après ce qui a été dit au-dessus, il s’agit forcément d’un minimum

Revenons sur la formule donnant le rapport d’aires rapporté à la section au col :

$$\frac{S}{S_C} = \frac{1}{M_{ach}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} . M^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2.(\gamma-1)}}$$

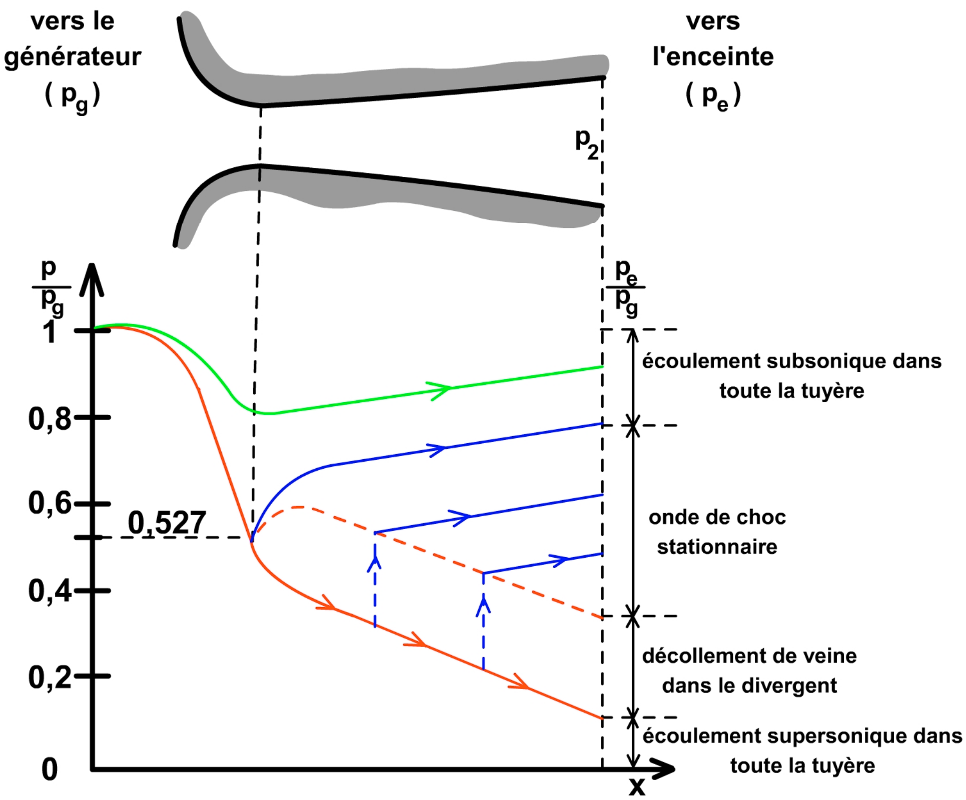
Le tracé de ce rapport en fonction du nombre de Mach a l’allure suivante :



- un écoulement **SUBSONIQUE** a lieu dans une tuyère **CONVERGENTE**
- un écoulement **SUPERSONIQUE** a lieu dans une tuyère **DIVERGENTE**

4) Tuyère de Laval

Une tuyère de LAVAL, est une tuyère composée, en amont, d'une partie convergente, et en aval d'une partie divergente.



- si $p_2 > p_e$ le jet se dilate à la sortie et crée une onde de dépression dont la vitesse est inférieure à celle du son en 2. Cette onde ne peut donc remonter le courant et modifier l'écoulement
- si $p_2 < p_e$ il se produit une onde de recompression à la sortie, provoquant une élévation de température. Si le rapport $\dfrac{p}{p_2}$ est suffisamment grand, l'élévation de température peut être assez élevée pour que la vitesse locale du son devienne plus grande que $v_{SON,2}$. L'onde de compression remonte alors le divergent. Mais quand elle se rapproche du col, le taux de compression de l'onde diminue ainsi que sa température et sa vitesse. Elle s'arrête alors en une section où sa vitesse est égale à celle du courant. On obtient alors une onde de recompression stationnaire, encore appelée «onde de choc ». A la traversée de cette onde, il y a une brusque variation irréversible des propriétés du fluide, suivie d'une variation isentropique dans la suite du divergent.

En résumé, on retiendra qu'une tuyère fonctionne dans de très mauvaises conditions si la pression aval est incorrecte. Une fraction appréciable de l'énergie cinétique est alors perdue dans les ondes irréversibles.

5) Vitesse limite ; débit limite

On considère un gaz qui s'échappe d'un réservoir par une tuyère de Laval.

a- vitesse limite théorique :

reprenons l'équation de Zeuner : $h+\frac{1}{2}.v^2=C^{ste}$, et utilisons la entre le générateur et la sortie de la tuyère

$$h_g+0=h_{sortie}+\frac{v_{sortie}^2}{2}$$

Le cas le plus favorable, est celui où toute l'enthalpie du générateur est convertie en énergie cinétique : $h_{sortie}=0$, soit

$$v_{\lim}=\sqrt{2.h_{géné}}$$

Or, nous avions obtenu le résultat suivant :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}.v^2=C^{ste}=\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p_g}{\rho_g}$$

le cas le plus favorable est aussi celui où la détente est poussée jusqu'à p = 0 ……

$$\frac{1}{2}.v_{\lim}^2=\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p_g}{\rho_g}=\frac{\gamma.r}{\gamma-1}.T_g \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_{\lim}=v_{SON,g}.\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}}$$

C'est la température initiale du gaz dans le réservoir qui fixe la vitesse maximale théorique de sortie.

Pour de l'air : $v_{\lim} \approx 2{,}22\ v_g \approx 44{,}54\ T_i^{1/2}$ <u>AN</u> : $v_{\lim} \approx 762\ m.s^{-1}$ à 20°C !

b- débit massique limite théorique :

la vitesse au col vérifie toujours M_{ach} = 1. Cela a pour effet de limiter le débit-masse.

$$\boxed{Q_{m,\lim}=\rho_{col}.S_{col}.v_{SON,col}=\rho_g.S_g.v_{SON,g}.\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2.(\gamma-1)}}}$$

ANNEXE : cas d'un écoulement isentropique de G.P.

Le raisonnement est fait par unité de masse.
Les hypothèses faites sont donc :

- le système est un G.P.
- l'écoulement est adiabatique réversible (ou encore isentropique)

Partons de l'équation d'Euler :

$$dp + \rho.v.dv + \rho.g.dz = 0$$

dans laquelle nous pouvons négliger l'influence de la pesanteur :

$$dp + \rho.v.dv = 0$$

soit encore :

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(v^2) = 0 \quad \textbf{ou} \quad \int\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste}$$

L'expression d'une transformation isentropique pour un G.P. s'exprime par :

$$p.V^{\gamma} = C^{ste} = \frac{p}{\rho^{\gamma}} = C^{ste}$$

d'où :

$$p = K.\rho^{\gamma} \Rightarrow dp = K.\gamma.\rho^{\gamma-1}.d\rho$$

ce qui permet d'intégrer :

$$\int\frac{dp}{\rho} = \int K.\gamma.\rho^{\gamma-1}.d\rho = K.\frac{\gamma}{\gamma-1}.\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p}{\rho}$$

dans l'équation d'Euler :

$$\boxed{\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste}}$$

En tenant compte de $p = \rho.r.T$ on obtient aussi :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}.r.T + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste}$$

mais aussi,

$$c_P.T + \frac{1}{2}.v^2 = C^{ste}$$